Title	一般相対論の共変的量子論 (場の量子論の代数解析的研究)
Author(s)	中西, 襄
Citation	数理解析研究所講究録 (1978), 324: 54-63
Issue Date	1978-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/104049
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
324巻 1978年 54-63

一般相対論の共変的量子論

京大 数理研　　中西 襄

アインシュタインの一般相対論が正しい理論であることは，もはや疑いの余地のないところである。他方，場の量子論は量子電磁力学の著しい成功をはじめとして素粒子物理学の基礎理論として確乎たる地位を占めている。しかし物理学の基礎理論がこのように二本立てであるのはあまり好ましいことではない。実際，アインシュタインの重力場の方程式において重力場の源となるエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は，電磁場やその他の物質場でつくられるはずだから，場の量子論によればそれは演算子でなければならない。したがって，$g_{\mu\nu}$ をも演算子と考えなければ数学的に矛盾を生ずるわけである。

もちろん重力場の量子化の問題は，ディラックをはじめとして多くの人によって研究されてきた。重力場の方程式が複雑な連立非線形偏微分方程式であるため技術的な困難はもちろんあるが，それよりももっと本質的な困難はそれが一般座

標変換という非常に大きな変換群に対して不変になっていることに起因する問題である．この問題を定性的に理解するために，ずっと単純な量子電磁力学の場合について説明しよう．周知のように，電磁場 $F_{\mu\nu}$ は電磁ポテンシァル A_μ で書き表わされるが，時空の任意関数 $\Lambda(x)$ を用いて電荷 e の荷電場 ψ を $\psi \exp ie\Lambda$ に A_μ を $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ に変えても，$F_{\mu\nu}$ の満たすマックスウェル方程式は不変である，すなわち物理的内容は変らない．このように任意関数だけの変換の不変性がある理論を一般にゲージ理論と呼んでいる．このゲージ変換だけの不定性のために，通常のように正準量子化をやろうとしても A_0 の正準共役量が存在せずうまくいかない．しかしこれはむしろ当然なのであって，ポアンカレ群の既約表現の一般的考察より質量ゼロの粒子はスピンの値の如何にかかわらず２成分しか自由度をもたないことが示される．実際，電磁波は横波であり，それに対応して光子は２方向だけの偏極自由度をもつ．つまり A_μ の４成分のうち２成分だけが光子という物理的実体を表わす．のこりのうち１成分は上述のゲージ変換の自由度であり全く物理的意味はない．最後の１成分はクーロン力に対応する自由度である．クーロン力は場の量子論においても量子化されない遠隔力として記述することも可能であるが，これは当然理論の明白なローレンツ共変性を破ることになっ

て好ましくない．他方，クーロン力の量子は観測されないものであるから，これを光子と同列に扱うことはできない．つまり電磁場の量子化の問題は，ゲージ変換の問題と同時にクーロン力の問題をも含んでいるのである．

幸いにして電磁場の共変的量子論は非常に美しい形で定式化されている．その処方箋は次の通りである．まず補助のスカラー場Bというものを導入し，電磁場のラグランジアン密度にたとえば $B\partial^\mu A_\mu$ という項をつけ加える．Bは他には全くでてこない量だから，Bに関する変分から $\partial^\mu A_\mu = 0$ というローレンツ条件が生ずる．これはゲージを固定することになるので，$B\partial^\mu A_\mu$ のことをゲージ固定項と呼んでいる．ゲージ固定項を導入するとゲージ不変性は破れ，A_μ を正準変数にとればその正準共役量が存在するので，通常の手続きで正準量子化ができる．

ところがここでもう一つの問題が現れる．それはミンコフスキー空間の計量が時間成分だけ空間成分と符号が逆になっていることに起因する．A_μ をローレンツ共変性と矛盾しないように量子化すると，どうしても状態ベクトルのはる空間を通常のヒルベルト空間ではなく，自分自身との内積が負にもなりうるような状態ベクトルをも含む空間，いわゆる不定計量のヒルベルト空間 $\mathcal{V}$ を用いて量子化しなければならな

い．（質量がゼロでないベクトル場の場合は，ローレンツ共変性に矛盾することなく第0成分を消去できるので，不定計量を使わないでも量子化できる．）　つまり電磁場の共変的量子論は不定計量の場の量子論でなくてはならない．一般に，不定計量の場の量子論では状態ベクトルの自分自身との内積のことをノルムと呼んでいる．（もちろんこれは数学的なノルムの条件に反する用語である．）　量子論の確率解釈によればノルムは確率を表わすので，それが負になることは許されない．そこで不定計量の場の量子論では補助条件というものを導入して負ノルム状態を封じ込める．つまり補助条件を満たす部分空間 $\mathcal{V}_{phys}$ ($\subset \mathcal{V}$) 内の状態ベクトルのみが物理的に意味があると仮定するのである．これが矛盾をきたさないためには $\mathcal{V}_{phys}$ が系の時間的発展によって変らないこと，すなわち数学的にいえば $\mathcal{V}_{phys}$ が系のハミルトニアン H の不変部分空間になっていることが必要である．さらに確率解釈と矛盾しないためには，$\mathcal{V}_{phys}$ の計量は半正定値でなくてはならない．（$\mathcal{V}_{phys}$ は必ず縮退のある空間である．そうでなければはじめから正定値計量で理論が構成できるはずだから．）

さて，上述のゲージ固定項を導入した電磁場の理論では，電流の保存則から B が自由場の方程式 $\Box B = 0$ を満たすことがいえる．エネルギー運動量 p_μ の空間にうつると，B の台は

光円錐 $p^\mu p_\mu = 0$ 上に限られるから，正エネルギー部分 $p_0 > 0$ がローレンツ共変性に矛盾することなく定義できる．この部分を $B^{(+)}$ と書くと，$B^{(+)}|f\rangle = 0$ となる状態ベクトル $|f\rangle$ の全体を $\mathcal{V}_{phys}$ とすれば，この $\mathcal{V}_{phys}$ が上述の2条件を満足することが証明できる．$\mathcal{V}_{phys}$ は真空から横波の光子とBに対応する量子とで生成される空間である．前者は正ノルムをもつが，後者はゼロノルムで，これがまさしくクーロン力の量子が観測される確率がつねにゼロであることに対応している．

重力場の場合，電磁場のゲージ変換に相当するのが一般座標変換である．したがって，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の10成分のうち4成分は物理的に意味のないものである．残りのうちさらに4成分はニュートンの万有引力に対応するものである．万有引力の法則に現れる質量は，相対論的にはエネルギーを意味しているので，運動量をもいっしょに扱う必要があり，このため4成分を必要とするわけである．残りの2成分が重力波を表わし，量子化されたものは重力子と呼ばれる．そこで重力場を共変的に量子化するには，電磁場の場合を真似て4成分の補助場 b_μ を導入し，それを含むゲージ固定項をアインシュタインのラグランジアン密度につけ加えればよいと考えられる．実際こうすれば，正準量子化は原理的に可能になる．

ところが問題は，補助条件をいかに設定するかである．

この問題を考えるのに，いきなり重力場を論ずるよりもそれよりも易しいヤン・ミルズ場をまず考察するのが有益である．電磁場は荷電場の相変換という可換群 $U(1)$ を局所化することによって得られたが，これに対しヤン・ミルズ場は一般のコンパクト半単純リー群を内部対称性にもつ理論を局所化することによって得られる．リー群自身が直接時空構造と関係しないという意味で一般相対論よりも簡単であるが，ヤン・ミルズ場 A_μ^a $(a=1,2,\cdots,N)$ はリー群（次元 N）の随伴表現に属するためそれ自身がまたその源となって非線形効果をもち，その意味で重力理論に近い．ヤン・ミルズ場の共変的量子化をやるのには，やはり電磁場のときと同じくゲージ固定項 $B^a\partial^\mu A_\mu^a$（a についても和をとる）を導入し，正準量子化を行なう．しかしこの場合，B^a 自身が随伴表現に属するため自由場の方程式を満足しないので，$B^{a(+)}$ が定義できない．

ヤン・ミルズ場に素朴にファインマン規則を適用して S 行列を摂動論的に計算してみるとユニタリ性が破れている，すなわち確率の保存と矛盾していることを，15年ばかり前ファインマンが見出した．これを救うため，仮想的なフェルミ統計に従う質量ゼロの複素スカラー場を導入し，それは決してファインマン図の外線にはでてこないで内線にだけ現れるもの

と仮定するとうまくいくことが分った．のちに，ファデエフとポポフは，ファインマンの経路積分の方法に基いてヤン・ミルズ場の量子化を行なうと，ゲージ固定を表わす無限次元のデルタ関数のゲージ群上での積分から自動的に上述の仮想場の効果がでてくることを示した．それゆえこの仮想場をファデエフ・ポポフ（略してF-P）お化けと呼ぶ．このようにしてヤン・ミルズ場の共変的量子化においてはF-Pお化けの導入が必要であるので，第一原理から出発する立場では最初からF-Pお化けの場を導入しそのラグランジアン密度$\mathcal{L}_{FP}$をつけ加えておくべきである．もちろん場の方程式もあらわにF-Pお化けを含むことになる．

ゲージ固定項$\mathcal{L}_{GF}$とF-Pお化け$\mathcal{L}_{FP}$を含むヤン・ミルズ場の不定計量の場の量子論のS行列のユニタリ性の問題は，ごく最近九後と小嶋によって解決された．まず$\mathcal{L}_{FP}$はF-Pお化けを複素場と思うとエルミート性と矛盾するので，彼らはこれを二つのエルミート場c^a, $\bar{c}^a$におきかえた．こうしてファインマン規則を変えることなく$\mathcal{L}_{FP}$をエルミートにすることが可能になった．第二にBRS変換不変性の利用である．$\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP}$の導入により全ラグランジアン密度$\mathcal{L}$はもはやゲージ不変ではなくなったが，最近ベッキ・ルーエ・ストラは$\mathcal{L}$はBRS変換と呼ばれる新しい変換に対して不変になることを発見した．こ

れは本質的には無限小ゲージ変換の変換関数をF-Pお化けの一つc^aで置き換えたものである．c^aがフェルミ統計に従う場であるために，BRS変換は外微分作用素dとよく似た性質をもつ．実際，c^aをdx^aと同一視すると，BRS変換のかなりの部分をリー代数のコホモロジーを使って表わすことができる．さて，$\mathcal{L}$のBRS変換不変性を用いると，ネータの定理から保存電流が見出される．これの第0成分を3次元積分したものによりBRS電荷Q_Bが定義されるが，これは保存量すなわちHと可換である．（Q_Bはc^aのフェルミ統計性のおかげでc^aとは反可換である．）そこで補助条件$Q_B|f\rangle=0$を設定することが可能になる．九後と小嶋は具体的な計算によりこのような$|f\rangle$の全体ではられる$\mathcal{V}_{phys}$は半正定値計量をもつことを証明した．こうしてヤン・ミルズ場の共変的量子論は少くとも形式的に成功を収めた．

そこで同じ方法を重力場に適用することを考える．そのためにまず一般座標変換に対応するBRS変換を構成することが必要である．今度の場合は変換が直接時空に関係しているので新しい事情が生ずる．たとえばϕをスカラー場とすると，$\partial_\mu\phi$はベクトル量であるから，一般座標変換によって異なる変換性を示す．このことに対応してBRS変換は微分演算と非可換になる．正確にいうと，c^aに対応する重力場のF-Pお化

ーをc^μと書くとき，BRS変換の作用素$\underline{\delta}$と微分演算子∂_μとは

$$[\underline{\delta}, \partial_\mu] = \kappa(\partial_\mu c^\lambda)\partial_\lambda \qquad (\kappa\text{は重力常数})$$

のような交換関係を満足するとすればよい．またいろいろな場に対する$\underline{\delta}$を無限小一般座標変換関数をc^μに置き換えて定義する．この$\underline{\delta}$を用いて，重力場のラグランジアン密度$\mathcal{L}$を$\sqrt{-g}$で除した量がBRS変換不変になるように$\mathcal{L}_{GF}+\mathcal{L}_{FP}$を選ぶ．($g \equiv \det g_{\mu\nu}$) $\mathcal{L}$の具体的形は物質場の部分を除き

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa}R - \frac{1}{2\kappa}g^{\mu\nu}(\partial_\mu b_\nu + \partial_\nu b_\mu) + \frac{i}{2}g^{\mu\nu}\{(\partial_\mu \bar{c}_\rho)(\partial_\nu c^\rho) + (\partial_\nu \bar{c}_\rho)(\partial_\mu c^\rho)\}\right]$$

である．Rはスカラー曲率．$\sqrt{-g}$という因子が余分にかかるのは4次元体積要素が一般座標変換不変でないためである．この$\mathcal{L}$に基いて場の方程式をたてると，保存BRS電流

$$J_b^\mu \equiv \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}(b_\rho \partial_\nu c^\rho - c^\rho \partial_\nu b_\rho)$$

が存在することが示せる．それゆえこれから保存BRS電荷Q_bが定義できる．

ゲージ固定項が導入されているため，正準量子化は$\mathcal{L}$を適当に部分積分したものについて矛盾なくやれる．Q_bが保存量なので，補助条件$Q_b|f\rangle = 0$も矛盾なく設定できる．さらに九後・小嶋の場合と同様にして$|f\rangle$の全体$\mathcal{V}_{phys}$が半正定値計量の部分空間であることを示すことができる．このようにして少くとも形式的に重力場の共変的量子論の構成に成功した．

かくして，われわれは場の量子論が物理学の最も基礎理論

であって，他の理論はことごとくそれから原理的に導かれるものであるとする立場をとることが可能になったと思われる.

なお具体的な内容は，原論文〔1〕あるいはレヴィュー報告〔2〕を参照して頂きたい.

〔1〕 N. Nakanishi, preprint RIMS-237 (Prog. Theor. Phys. 59 (1978) No.3 掲載予定)

〔2〕 中西 襄，ヤン・ミルズ場と重力場の不定計量の場の量子論(素粒子論研究に掲載予定)